

Résolution numérique d'une équation de Fokker-Planck ionique avec température électronique

Christophe BUET, Stéphane DELLACHERIE, Rémi SENTIS

CEA, Bruyères-le-Châtel, service MLS, B.P.12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France

(Reçu le 9 mai 1998, accepté le 25 mai 1998)

Résumé. On décrit un schéma numérique pour le traitement d'un opérateur de collision ion/électron de type Fokker-Planck ; pour cela on introduit la notion de *moyenne entropique* de deux quantités positives. Ce schéma a la propriété d'être entropique au sens du théorème H de Boltzmann sous un critère de type CFL. On montre de plus que la solution converge en temps grand vers un unique état d'équilibre maxwellien. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Numerical solution of a ionic Fokker-Planck equation with electronic temperature

Abstract. We describe a numerical scheme for dealing with an ion electron/collision operator of the Fokker-Planck type; for that purpose, we introduce the notion of entropic average of two positive quantities. This scheme has the property to be entropic in the sense of Boltzmann's H theorem under a CFL criteria. Moreover, we prove that the solution converges when the time grows, towards a unique Maxwellian equilibrium state. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

We are concerned with the modelization of a hot plasma with only one species whose atomic mass in m , the ionization level being Z . The ionic distribution $f = f(t, x, v)$ ($x \in \mathbf{R}^3$ and $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$) and the electronic temperature $T_e(t, x)$ are solutions of (1), (2), where $\mathcal{E}_e(T_e) = \frac{3}{2} Z N T_e$, $P_e = Z N T_e$ are the internal energy and the pressure of the electrons. Moreover, N, \vec{U} are the density and the macroscopic velocity of the ions and $\langle \cdot \rangle = \int \cdot d\vec{v}$. The Fokker-Planck operator S (see (3)) describes the ion/electron collisions and the classical quadratic Fokker-Planck operator B (see [7]) describes the ion/ion collisions.

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

The numerical solution of the overall system (1) and (2) can be done with a finite difference method in the phase space (\vec{x}, \vec{v}) with a five stages splitting:

- 1) Resolution of $\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{v} \nabla_x f = 0$ with an upwind (with respect to the x variable) scheme.
- 2) Resolution of the ion/ion Fokker–Planck operator, i.e. we solve $\frac{\partial}{\partial t} f = B(f)$. (See [7] for example for a conservative and entropic scheme.)
- 3) Resolution of $\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\nabla_x P_e}{Nm} \nabla_v f$ with an upwind (with respect to the \vec{v} variable) scheme.
- 4) Resolution of the Fokker–Planck operator S , i.e. we solve $\frac{\partial}{\partial t} f = S(f)$ coupled with $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_e = \frac{m}{2} \langle v^2 S(f) \rangle$.
- 5) Resolution of the remaining part of the electronic energy equation.

In this Note, we describe only the fourth stage and we introduce the semi-discrete and the fully discrete scheme with (9), (10) and (16) knowing that the distribution f at the interfaces of the mesh is defined with the *entropic average*: see the definition (8). The main results of this Note are summarized in the following propositions (where $\langle g \rangle = \sum_j = g_j \Delta v$).

PROPOSITION 3. – *For all initial conditions $\{(f_j^0)_j, T_e^0\}$ strictly positive, the scheme (9) and (10) is such that $f_j(t)$ and $T_e(t)$ are strictly positive. Moreover, the numerical entropy $\langle f \log f \rangle + ZN \log (NT_e^{-3/2})$ decreases and, when $t \rightarrow \infty$, we have:*

$$T_e(t) \rightarrow T_e^\infty, \quad f_j(t) \rightarrow f_j^\infty = N \frac{\mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty}(v_j)}{\langle \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty} \rangle}$$

knowing that (U^∞, T_e^∞) is the unique solution of the system (14)-(15).

PROPOSITION 4. – *For all initial conditions $\{(f_j^0)_j, T_e^0\}$ strictly positive, the scheme (16) is such that $f^n > 0$, $\inf_n (T_e^n) > 0$, and we have:*

$$H^\infty \leq H^{n+1} \leq H^n \quad (\text{Gibbs lemma})$$

when $\Delta t < \min(\Delta t_1^n, \Delta t_2^n)$. Moreover, the thermodynamical equilibrium is preserved, i.e.

$$f_j^n = \frac{N}{\langle \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty} \rangle} \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty}(v_j) \text{ and } T_e^n = T_e^\infty \iff f^{n+1} = f^n.$$

See §2 for the definition of H^∞ , Δt_1^n , Δt_2^n , and the Maxwellian equilibrium \mathcal{M}_\cdot ; H^n is the value of the numerical entropy at time t^n . Numerical results show that this scheme describes well the ion/electron collisions, even on a coarse velocity grid.

L'évolution d'une population $f = f(t, x, v)$ d'ions (de masse m et de charge Z) et de la température électronique $T_e = T_e(t, x)$ (où $x \in \mathbf{R}^3$ et $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$) est régie par le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f + \vec{v} \cdot \nabla_x f - \frac{\nabla_x P_e}{Nm} \cdot \nabla_v f = B(f) + S(f), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_e(T_e) + \nabla_x \cdot (\mathcal{E}_e(T_e) \vec{U}) + P_e \nabla_x \vec{U} = -\frac{m}{2} \langle v^2 S(f) \rangle, \end{cases} \quad (2)$$

où $\mathcal{E}_e(T_e) = \frac{3}{2} ZNT_e$, $P_e = ZNT_e$, $N = \langle f \rangle$, $N\vec{U} = \langle f\vec{v} \rangle$ et

$$S(f)(\vec{v}) = \Omega \nabla_v \cdot \left[(\vec{v} - \vec{U}) f(v) + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right]; \quad (3)$$

de plus, B est l'opérateur de Fokker–Planck quadratique classique (voir [4]) et $\langle \cdot \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}^3} \cdot d\vec{v}$. Le coefficient Ω dépend continûment de N et T_e (voir [6]). Sur l'origine de ce système, voir [3] ou [7]. Pour les détails de cette Note, voir [2].

1. Généralités

On suppose que les fonctions f sont positives et à décroissance rapide vers 0 quand $|\vec{v}| \rightarrow \infty$. On sait que l'opérateur B est conservatif en masse, impulsion et énergie; de plus, il fait décroître la quantité $\langle f \log f \rangle$ qui est l'entropie ionique (car $\langle B(f) \log f \rangle \leq 0$). D'autre part, en introduisant une température ionique T définie par $3NT = m \langle (\vec{v} - \vec{U})^2 f \rangle$, l'opérateur S vérifie :

$$\langle S(f) \rangle = 0, \quad \langle S(f) \vec{v} \rangle = 0, \quad \frac{m}{2} \langle S(f) v^2 \rangle = 3\Omega N (T_e - T).$$

Définissons la maxwellienne $\mathbf{M}_{N, \vec{U}, T}(\vec{v}) = \frac{N}{(2\pi T/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(\vec{v} - \vec{U})^2}{2T} \right]$. En supposant f maxwellienne et en prenant les trois premiers moments de (1), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_x \vec{U} \right) N &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_x \vec{U} \right) (N \vec{U}) + \nabla_x (NT + P_e) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla_x \vec{U} \right) \left(\frac{3}{2} NT \right) + NT \nabla_x \vec{U} &= 3\Omega N (T_e - T), \end{aligned}$$

ce qui, couplé à (2), donne le système Euler bitempérature classique (voir par exemple [5]).

PROPOSITION 1. – Pour tout $f > 0$ et $T_e > 0$, on a :

$$\left\langle S(f) \log \left(f / \mathbf{M}_{N, \vec{U}, T_e} \right) \right\rangle \leq 0.$$

De plus, $\left\langle S(f) \log \left(\mathbf{M}_{N, \vec{U}, T_e} \right) \right\rangle = 0$ si et seulement si $f = \mathbf{M}_{N, \vec{U}, T_e}$.

PROPOSITION 2. – Soient f et T_e solutions de (1) avec T_e régulière en x . Alors on a la relation de décroissance de l'entropie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle f \log f \rangle + \mathcal{H}_e) + \nabla_x \cdot (\langle \vec{v} f \log f \rangle + \vec{U} \mathcal{H}_e) \leq 0, \text{ où } \mathcal{H}_e = ZN \log(NT_e^{-3/2}). \quad (5)$$

La résolution numérique du système complet se fait par une méthode de différences finies en espace et en vitesse grâce à un splitting en cinq phases indiqué dans la version anglaise. On décrit ci-dessous un schéma numérique pour la phase 4.

2. Schéma numérique semi-discret

Plaçons-nous dans un cadre monodimensionnel en \vec{v} pour simplifier; $\mathcal{E}_e(T_e)$ devient alors $\frac{1}{2} ZNT_e$, et

$$m \langle (v - U)^2 f \rangle = NT, \quad \frac{m}{2} \langle v^2 S(f) \rangle = \Omega (NT - NT_e).$$

Il s'agit de discrétiser en vitesse le système non linéaire suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} f = S(f), \quad f(0) = f^0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_e(T_e) = \Omega (m \langle (v - U)^2 f \rangle - NT_e), \quad T_e(0) = T_e^0. \quad (7)$$

On utilise une discrétisation de \mathbf{R} grâce à une grille de différences finies $\{v_j\}_{1, \dots, j_{\max}}$ (où $v_{j+1} - v_j = \Delta v$), et on note $f_j = f_j(t)$ l'évaluation de $f(t)$ en v_j . Comme on tronque le domaine en vitesse, il convient d'imposer la condition au bord du domaine : $(v - U)f + \frac{T_e}{m} \partial_v f = 0$. Dorénavant, $\langle g \rangle$ désigne $\sum_{j=1}^{j_{\max}} g_j \Delta v$.

Pour deux quantités strictement positives x et y , on définit leur *moyenne entropique* $\tilde{f}_{x,y}$ par :

$$\tilde{f}_{x,y} = \frac{x-y}{\log x - \log y} \text{ si } x \neq y, \quad \tilde{f}_{x,y} = x \text{ sinon} \quad (8)$$

et l'on pose $\tilde{f}_{x,y} = 0$ si $xy = 0$. Par ailleurs, notons $(Af)_i = a_j(f_{j+1} - f_j) - b_j(f_j - f_{j-1})$ avec $a_j = 1$ (sauf $a_{j_{\max}} = 0$), $b_j = 1$ (sauf $b_1 = 0$) et considérons le système semi-discrétisé satisfait par $\{f_j(t), T_e(t)\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j = S(f)_j, \quad S(f)_j = \frac{\Omega}{\Delta v} \left[(v_{j+1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j+1/2} - (v_{j-1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j-1/2} \right] + \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} (Af)_i, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_e(T_e) + \frac{m}{2} \langle v_j^2 S(f) \rangle = 0 \quad (10)$$

avec les conditions initiales naturelles et

$$\tilde{U} = \sum_j v_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} \left(\sum_j \tilde{f}_{j+1/2} \right)^{-1}, \quad (11)$$

$\tilde{f}_{j+1/2}$ étant la moyenne entropique de f_j et de f_{j+1} ; on pose d'autre part $\tilde{f}_{1/2} = \tilde{f}_{j_{\max}+1/2} \equiv 0$. On obtient les propriétés de bilan

$$\langle S(f) \rangle = 0, \quad \langle v_j S(f) \rangle = 0. \quad (12)$$

En toute rigueur, la dernière relation n'est vraie que si $f_1 = 0$ et $f_{j_{\max}} = 0$ (voir [2] pour une analyse rigoureuse). De plus, la formule (10) est consistante avec (7) car on a :

$$\frac{m}{2} \langle v^2 S(f) \rangle = \Omega (NT_e - \tilde{N}\tilde{T}), \quad \text{où } \tilde{N}\tilde{T} = \frac{m \Delta v}{2} \sum_j (v_{j+1/2} - \tilde{U})^2 \tilde{f}_{j+1/2}.$$

Pour des f_j et T_e positifs, on introduit l'entropie numérique $H(t) = \langle f \log f \rangle - \frac{ZN}{2} \log T_e$. Notons $\mathcal{M}_{u,y} = \left(\frac{m}{2\pi y} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m(v-u)^2}{2y} \right]$.

LEMME. – Pour tous $f_j(t)$ et $T_e(f)$ positifs, en posant $g = f/\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}$, on a :

$$\begin{aligned} S(f) \frac{m \Delta v^2}{\Omega T_e} &= \tilde{f}_{j+1/2} (\log(g_{j+1}) - \log(g_j)) \\ &\quad - \tilde{f}_{j-1/2} (\log(g_j) - \log(g_{j-1})) \\ \frac{\partial}{\partial t} H &= -\frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2} [\log(g_{j+1}) - \log(g_j)]^2 \leq 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 3. – Pour toute condition initiale $\{(f_j^0)_j, T_e^0\}$ strictement positive, le schéma (9) et (10) est tel que $f_j(t) > 0$ et $\inf_{t \in [0, +\infty[} T_e(t) > 0$. L'entropie $H(t)$ décroît et quant $t \rightarrow \infty$:

$$T_e(t) \rightarrow T_e^\infty, \quad f_j(t) \rightarrow f_j^\infty = \hat{N} \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty}(v_j) \quad \text{où } \hat{N} = N \langle \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty} \rangle^{-1}$$

sachant que (U^∞, T_e^∞) est l'unique solution du système :

$$\langle v \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty} \rangle \hat{N} = \langle v f^0 \rangle, \quad (14)$$

$$\langle (v - U^0)^2 \mathcal{M}_{U^\infty, T_e^\infty} \rangle \hat{N} + \frac{ZN}{m} T_e^\infty = \langle (v - U^0)^2 f^0 \rangle + \frac{ZN}{m} T_e^0. \quad (15)$$

3. Schéma numérique totalement discret, explicite

En utilisant la moyenne entropique $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ de f_j^n et de f_{j+1}^n et les conditions aux limites comme dans le schéma semi-discret, la discrétisation explicite de (9), (10) s'écrit :

$$f_j^{n+1} - f_j^n = \Delta t S(f^n, T_e^n)_j, \quad \frac{ZN}{2} (T_e^{n+1} - T_e^n) = \Delta t \Omega^n (\widetilde{NT}^n - N^n T_e^n). \quad (16)$$

On obtient les propriétés de conservation :

$$\begin{cases} \langle f^{n+1} \rangle = \langle f^n \rangle, & \langle v f^{n+1} \rangle = \langle v f^n \rangle, \\ \left\langle \frac{v^2}{2} f^{n+1} \right\rangle - \left\langle \frac{v^2}{2} f^n \right\rangle = \frac{\Delta t}{m} \Omega^n (N^n T_e^n - \widetilde{NT}^n). \end{cases}$$

Notons $H^\infty = \langle f^\infty \log f^\infty \rangle - \frac{ZN}{2} \log T_e^\infty$ et $\Delta t_1^n = \frac{m \Delta v^2}{\beta \Omega^n T_e^n \mathfrak{M}^n} \min_k \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}^n} \right)_k \left[\max_k \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}^n} \right)_k \right]^{-1}$ avec :

$$\mathfrak{M}^n = \max_k \frac{\mathcal{M}_{k\pm 1}^n}{\mathcal{M}_k^n}, \quad \mathcal{M}_k^n = e^{-\frac{m(v_k - \bar{v}^n)^2}{2T_e^n}}, \quad \beta = 4 + 4 \frac{\max_k (v_k)^4}{Z (T_e^n/m)^2}.$$

PROPOSITION 4. – Pour toute condition initiale $\{(f_j^0)_j, T_e^0\}$ strictement positive, le schéma (16) est tel que $f^n > 0$ et $\inf_n (T_e^n) > 0$; de plus, on a :

$$H^\infty \leq H^{n+1} \leq H^n \text{ (lemme de Gibbs)}$$

sous le critère CFL $\Delta t < \Delta t_1^* = \min(\Delta t_1^n, \frac{Z}{4\Omega^n})$. D'autre part, on a :

$$f_j^n = f_j^\infty \text{ et } T_e^n = T_e^\infty \iff f^{n+1} = f^n.$$

Sous l'hypothèse $\Omega = C^{\text{ste}} \frac{N}{T_e^{3/2}}$ (voir [3]), on montre que Δt_1^* ne tend pas vers 0 quand n augmente.

4. Résultats numériques

On considère le problème (6), (7) (où v est monodimensionnelle), on prend $v_{j_{\max}} = -v_1 = 5\sqrt{\frac{T_e^0}{m}}$ avec $j_{\max} = 100$ et $Z = 2$, $m = 2.5m_{\text{proton}}$. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} f^0 = \text{maxwellienne centrée de température } T^0, \\ N = 10^{22} \text{ cm}^{-3}, \quad U = 0, \quad T^0 = 1 \text{ Kev}, \quad T_e^0 = 2 \text{ Kev}. \end{cases}$$

On compare sur les figures 1 à 4 les résultats obtenus avec les schémas utilisant la moyenne entropique, la moyenne de Chang et Cooper (voir [4]) et la moyenne arithmétique sur un maillage fin et sur un maillage grossier. (Si la température est faible en début de calcul et est très forte en fin de calcul, il faut avoir un Δv adapté, ce qui conduit à une discrétisation sur quelques mailles seulement de la fonction de répartition initiale f^0 .) Lorsque le maillage est grossier, on constate que la moyenne entropique donne un résultat plus précis que celle de Chang et Cooper et que la moyenne arithmétique ne préserve plus la positivité de la distribution f (voir figure 4).

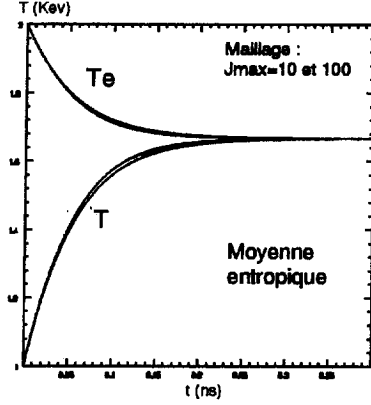


Figure 1. – Températures.

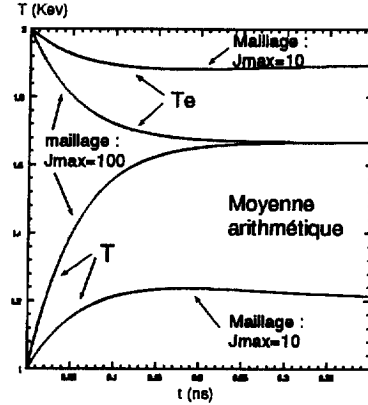


Figure 2. – Températures.

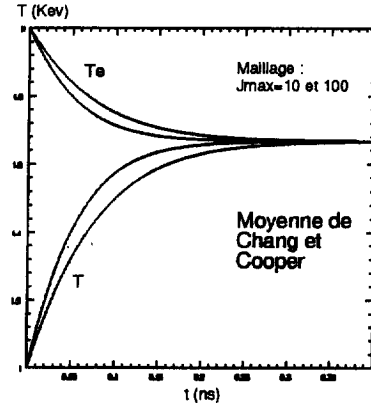


Figure 3. – Températures.

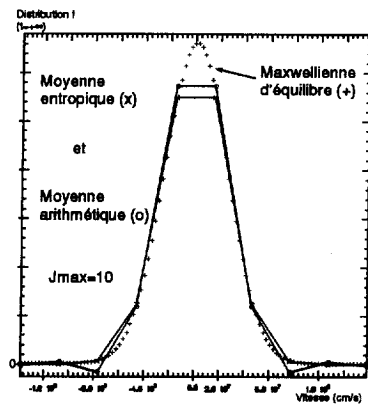


Figure 4. – Distribution f à $t = +\infty$.

Le schéma proposé ici s'étend en géométrie bidimensionnelle axisymétrique sans difficulté. Par ailleurs, on peut impliciter la partie diffusion de (16) en remplaçant $S(f^n, T_e^n)_j$ par

$$\frac{\Omega^n}{\Delta v} \left[(v_{j+1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j+1/2}^n - (v_{j-1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j-1/2}^n \right] + \frac{\Omega^n T_e^n}{m \Delta v^2} A f^{n+1},$$

et l'équilibre thermodynamique f^∞ est encore solution stationnaire avec ce schéma semi-implicite.

Références bibliographiques

- [1] Buet C., Cordier St., Numerical Analysis of Conservative and Entropy Scheme for the Fokker-Planck-Landau Equation, SIAM J. Numer. Anal. (à paraître).
- [2] Buet C., Dellacherie S., Sentis R., Résolution numérique d'une équation de Fokker-Planck ionique avec température électronique, Rapport CEA, 1998 et Dellacherie S., Thèse Univ. Paris VII, 1998.
- [3] Casanova M., Larroche O., Matte J.P., Kinetic Simulation of a Collisional Shock Wave in a Plasma, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 2143.
- [4] Chang J.S., Cooper G., A practical Difference Scheme for Fokker-Planck Equations, J. Comput. Phys. 6 (1970) 1-16.
- [5] Cordier S., Degond P., Markovitch D., Schmeiser C., Asymp. Anal. 11 (1995) 209-240 et Browers R., Wilson J.R., Numerical Modelling in Applied Physics, Jones-Bartlett, 1991.
- [6] Decoster A., Fluid Equation and Transport Coefficients of Plasmas, in: Modelling of collisions, P.A. Raviart (Ed.), Masson, 1998.
- [7] Degond P., Lucquin-Desreux B., Transport coefficient of plasmas and disparate mass binary gases, Transport Theory Statist. Phys. 25 (1996) 595.